



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра фундаментальной математики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

 Б.Я. Солон  
(подпись)

« 1 » сентября 20 21 г.

### Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы функционального анализа

Уровень высшего образования:	бакалавриат
Квалификация выпускника:	бакалавр
Направление подготовки:	02.03.01 Математика и компьютерные науки
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математика и компьютерные науки

Иваново



## 1. Цели освоения дисциплины

Программа предусматривает изложение основных понятий и принципов функционального анализа в объеме традиционного вводного курса, что соответствует требованиям к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы по специальности. Предварительно излагаются основные понятия топологических, метрических, нормированных и гильбертовых пространств, теории интеграла Лебега и пространства суммируемых функций. Линейные операторы появляются уже здесь. Затем естественным образом осуществляется переход к изучению основных понятий теории линейных ограниченных операторов, теории компактных операторов, излагается теорема Фредгольма. Интегральные уравнения встречаются уже в начале курса, сразу после изучения принципа сжимающих отображений. Изучение линейных интегральных уравнений возобновляется после доказательства теоремы Фредгольма.

Для понимания и успешного усвоения курса достаточно, чтобы студент владел основными понятиями математического анализа, топологии и линейной алгебры.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина по выбору.

Для понимания и успешного усвоения курса достаточно, чтобы студент владел основными понятиями теории множеств, математического анализа, функционального анализа, теории функций комплексного переменного и алгебры.

Для освоения данной дисциплины обучающийся должен:

Знать: Основные понятия теории множеств, математического анализа, топологии и линейной алгебры.

Уметь: Пользоваться основными понятиями теории множеств, математического анализа, топологии и линейной алгебры.

Иметь навыки: Основными понятиями теории множеств, математического анализа, топологии и линейной алгебры.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

**3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина** (согласно матрице соответствия компетенций и составляющих ОП)

При освоении дисциплины формируются следующие компетенции в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

- а) общекультурные (ОК):
- б) общепрофессиональные (ОПК):
- в) профессиональные (ПК): *ПК-1.*



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

Способен применять в научно-исследовательской деятельности знания в области математики и (или) компьютерных наук (ПК-1).

г) дополнительные (ПКВ):

### 3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с формируемыми компетенциями

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: введенные в курсе понятия и соответствующие теоремы (ПК-1.1).

Уметь: применять доказанные теоремы и изученные методы к решению задач (ПК-1.2).

Иметь навыки пользования: методами, изложенными в курсе (ПК-1.3).

### 4. Объем и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 8 зачетных единиц (288 академических часов).

#### 4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.

№ п/ п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)  Формы промежуточной аттестации
			Занятия лекцион -ного типа	Занятия семинар -ского типа	
1	Элементы теории множеств	5	3	3	Ответ на практическом занятии
2	Метрические и топологические пространства	5	9	9	Ответ на практическом занятии
3	Линейные топологические и нормированные пространства	5	6	4	Контрольная работа
4	Линейные ограниченные операторы и функционалы	5	8	6	Ответ на практическом занятии
5	Мера и интеграл Лебега	5	6	6	Ответ на практическом занятии
6	Пространства суммируемых функций	5	4	4	Контрольная работа
Итого за семестр:			36	32	Зачет с оценкой
7	Сопряженное пространство. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр оператора	6	6	6	Ответ на практическом занятии



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

8	Гильбертовы пространства. Сопряженные операторы	6	6	5	Контрольная работа
9	Теорема Хана-Банаха	6	4	1	Ответ на практическом занятии
10	Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая сходимости	6	6	6	Ответ на практическом занятии
11	Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма	6	8	6	Контрольная работа
12	Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта. Линейные интегральные уравнения	6	4	6	Ответ на практическом занятии
Итого за семестр:			34	30	Экзамен
Итого по дисциплине:			70	62	

#### 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

##### Раздел 1. Элементы теории множеств

###### Тема 1. Операции над множествами. Понятие функции

Общее понятие функции. Образ множества. Прообраз множества. Последовательности. Семейство. Операции над множествами. Соотношения двойственности.

###### Тема 2. Понятие мощности. Счетные множества и множества мощности континуума

Равномощные множества. Конечные и бесконечные множества. Примеры и свойства счетных множеств. Понятие мощности. Сравнение мощностей. Теорема Шредера-Бернштейна. Операции над кардинальными числами. Отсутствие наибольшей мощности. Множества мощности континуума.

##### Раздел 2. Метрические и топологические пространства

###### Тема 3. Основные понятия метрических и топологических пространств. Непрерывные отображения.

Определение и примеры метрических пространств. Открытые и замкнутые множества. Топологические пространства. Внутренность. Граница. Замыкание. Предельные точки и точки прикосновения. Сходимость. Непрерывные отображения. Непрерывность метрики. Гомеоморфизм.

###### Тема 4. Сепарабельность. Полнота.

Сепарабельные пространства. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств. Фундаментальные последовательности. Полные пространства. Примеры полных и неполных пространств. Пополнение метрического пространства.



**Тема 5. Множества первой и второй категории. Нигде не плотные множества.** Множества первой и второй категории. Свойства множества первой и второй категории. Теорема Бэра.

**Тема 6. Компактность. Ограниченные и вполне ограниченные множества.** Компактные множества. Критерий компактности. Непрерывные функции на компактных пространствах. Равномерная непрерывность. Теорема Арцела-Асколи.

**Тема 7. Принцип сжимающих отображений.**

Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям Фредгольма. Обобщенный принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям Вольтера.

### **Раздел 3. Линейные топологические и нормированные пространства**

**Тема 8. Линейные операторы и функционалы.**

Линейные пространства. Линейные операторы и функционалы. Ядро и образ линейного оператора.

**Тема 9. Нормированные и линейные топологические пространства.**

Линейные топологические пространства. Изоморфизм. Подпространство. Линейное нормированное пространство. Линейная изометрия. Примеры нормированных пространств. Прямое произведение нормированных пространств. Фактор-пространство. Ряды в нормированном пространстве.

### **Раздел 4. Линейные ограниченные операторы и функционалы**

**Тема 10. Линейные ограниченные операторы.**

Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма линейного ограниченного оператора.

**Тема 11. Эквивалентные нормы.**

Изоморфизм нормированных пространств. Эквивалентные нормы. Пополнение нормированного пространства. Эквивалентность норм в конечномерном нормированном пространстве. Конечномерные подпространства. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.

### **Раздел 5. Мера и интеграл Лебега**

**Тема 12. Мера Лебега.**

Алгебра и  $\sigma$ -алгебра множеств. Борелевские множества. Функции множеств. Аддитивная и счетно-аддитивная функция множеств. Мера. Промежутки. Элементарные множества и их мера. Внешняя мера. Множества меры нуль. Измеримые множества. Единственность продолжения меры. Пространства с мерой.

**Тема 13. Интеграл Лебега.**

Измеримые функции и операции над ними. Интеграл Лебега. Теоремы Б. Леви и П. Фату. Теорема Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла. Счетная аддитивность



интеграла Лебега. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. равенство интегралов Римана и Лебега. Приближение интегрируемых функций непрерывными. Интегрирование комплексных функций. Теорема Фубини.

## **Раздел 6. Пространства суммируемых функций**

### **Тема 14. Банаховы пространства суммируемых в степени $p$ функций.**

Определение пространств суммируемых в степени  $p$  функций. Сепарабельность (при  $p < \infty$ ) и несепарабельность (при  $p = \infty$ ).

## **Раздел 7. Сопряженное пространство. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр оператора**

### **Тема 15. Пространство линейных ограниченных операторов. Сопряженное пространство.**

Определение пространства линейных ограниченных операторов. Условие его полноты. Определение сопряженного пространства и его полнота. Примеры.

### **Тема 16. Теоремы о существовании обратных операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.**

Доказательство теорем о существовании обратных операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.

### **Тема 17. Спектр оператора. Резольвента.**

Определение регулярных точек и собственных значений. Спектр оператора. Резольвента. Примеры.

## **Раздел 8. Гильбертовы пространства. Сопряженные операторы**

### **Тема 18. Евклидовы и гильбертовы пространства.**

Определение евклидовых и гильбертовых пространств. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского. Непрерывность скалярного произведения. Изоморфизм евклидовых пространств. Примеры.

### **Тема 19. Теорема об ортогональном разложении. Сопряженные операторы.**

Ортогональное дополнение и его свойства. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала. Сопряженные операторы.

### **Тема 20. Ортогональные системы.**

Определение ортогональных систем. Неравенство Бесселя. Полные системы. Ортогонализация Шмидта. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

## **Раздел 9. Теорема Хана-Банаха**

### **Тема 21. Продолжение линейных операторов.**



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

---

Продолжение линейного ограниченного оператора по непрерывности. Теорема Хана-Банаха и ее следствия.

#### **Раздел 10. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая сходимоть**

##### **Тема 22. Принцип равномерной ограниченности.**

Теорема Банаха-Штейнгауза и ее следствия. Теорема об естественном вложении пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства.

##### **Тема 23. Слабая сходимоть.**

Ограниченность слабо сходящейся последовательности. Слабая сходимоть в гильбертовом пространстве.

#### **Раздел 11. Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма**

##### **Тема 24. Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма.**

Определение и свойства компактных операторов. Спектр компактного оператора. Альтернатива Фредгольма. Компактные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Фредгольма.

#### **Раздел 12. Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта. Линейные интегральные уравнения**

##### **Тема 25. Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта.**

Определение и свойства самосопряженных операторов. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

##### **Тема 26. Линейные интегральные уравнения.**

Линейные интегральные операторы. Линейные интегральные уравнения.

#### **5. Образовательные технологии**

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине: технологии смешанного обучения.

#### **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа студентов состоит в решении задач.

Полностью весь методический материал по обеспечению самостоятельной работы студентов приводится в Приложении 1 к РП.

#### **7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Оценочные средства для проведения текущего контроля: Ответ на практическом занятии.



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

---

Оценивание промежуточных и окончательных результатов освоения дисциплины: контрольные работы. Зачет с оценкой. Экзамен.

Форма проведения зачета: устная.

Критерий оценки: *«отлично»*.

Оценка *«отлично»* выставляется студенту, если продемонстрировано знание понятий и теорем курса и умение творчески применять их к решению задач.

Критерий оценки: *«хорошо»*.

Оценка *«хорошо»* выставляется студенту, если продемонстрировано знание основных понятий и теорем курса и умение применять их к решению простых задач.

Критерий оценки: *«удовлетворительно»*.

Оценка *«удовлетворительно»* выставляется студенту, если продемонстрировано незнание некоторых основных понятий и теорем курса.

Критерий оценки: *«неудовлетворительно»*.

Оценка *«неудовлетворительно»* выставляется студенту, если продемонстрировано незнание понятий и теорем курса и неумение решать даже простые задачи.

Форма проведения экзамена: устная.

Критерий оценки: *«отлично»*.

Оценка *«отлично»* выставляется студенту, если продемонстрировано знание понятий и теорем курса и умение творчески применять их к решению задач.

Критерий оценки: *«хорошо»*.

Оценка *«хорошо»* выставляется студенту, если продемонстрировано знание основных понятий и теорем курса и умение применять их к решению простых задач.

Критерий оценки: *«удовлетворительно»*.

Оценка *«удовлетворительно»* выставляется студенту, если продемонстрировано незнание некоторых основных понятий и теорем курса.

Критерий оценки: *«неудовлетворительно»*.

Оценка *«неудовлетворительно»* выставляется студенту, если продемонстрировано незнание понятий и теорем курса и неумение решать даже простые задачи.

Типовые варианты вопросов представлены в фонде оценочных средств (Приложение 2).

## **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Основная литература:





Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

1. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
2. Люстерник Л. А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Люстерник Л. А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1968.
6. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболев Т.С.. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.
7. Методические указания к курсу функционального анализа. Элементы теории множеств. Иваново, 1982.
8. Методические указания к курсу функционального анализа. Метрические и топологические пространства. Иваново, 1983.
9. Методические указания к курсу функционального анализа. Нормированные пространства. Линейные операторы. Иваново, 1985.
10. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1980.
11. Белов А.С. Методические указания к курсу функционального анализа. Мера и интеграл Лебега. Иваново, 1981-1982.

Дополнительная литература:

12. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
13. Канторович Л.В., Акилов Т.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1981.
14. Наймарк И.А. Нормированные кольца. М.: Наука, 1969. (Глава 1).
15. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
16. Иосида М. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
17. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

Интернет-ресурсы:

В локальной сети ИвГУ, по адресу **<http://10.1.1.39/>**  
доступны электронные варианты учебников и учебных пособий.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»  
<https://uni.ivanovo.ac.ru>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru);  
<http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/ebs-universitetskaya-biblioteka>  
Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/elibnew>



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

---

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;
- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;
- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, выполнения курсовых работ (проектов) с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование и учебно-наглядные пособия для занятий лекционного типа, обеспечивающие тематические иллюстрации:



Основная профессиональная образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки  
(Математика и компьютерные науки)

**Автор(ы) рабочей программы дисциплины:** Белов А.С., профессор, доцент, д.ф.-м.н.

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики  
« 31 » августа 2021 г., протокол № 1

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_1\_\_ от « 1 » сентября 2023 г.  
Согласовано:

Руководитель ОП  Туртин Д.В.  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.  
Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_ Туртин Д.В.  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.  
Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_ Туртин Д.В.  
(подпись)

)