Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

9 класс

1. На доске записаны три целых числа. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго числа вычли сумму цифр третьего, а из третьего числа вычли сумму цифр первого числа. Могут ли полученные разности равняться соответственно

a) 5,6,7

b) 6,7,8?

Решение: а) Могут. Например, подходят числа 13, 8, 11. Возможно, есть и другие примеры.

b) Не могут. Обозначим через S(x) – сумму цифр числа x. Заметим, что числа x иS(x) дают одинаковые остатки при делении на 9. Предположим такие числа a, b, c есть. Тогдаa – S(b) = 6, b – S(c) = 7, c – S(a) = 8. Откудаполучаем, чтоa + b + c – S(a) – S(b) – S(c) = 6+7+8, т.е.

$$(a – S(a)) + (b – S(b)) + (c – S(c)) = 21.$$

Но сумма слева делится на 9, а справа – не делится.

Критерии проверки:

- Верный пример в пункте а – 3 балла
- Верное доказательство пункта b - 4 балла

2. Известно, что квадратичная функция $f(x)= x^2+ax+b$ имеет два различных корня x_1, x_2 и $f(2025)=f(1)$. Найдите x_1+x_2.

Решение. Ответ: 2026

$f(2025) = 2025^2 + a*2025 + b$, $f(1) = 1^2 + a*1 + b$, тогда

$f(2025) - f(1) = (2025^2 + a*2025) + b – (1^2 + a*1 + b) = (2025 -1)*(2025+1) +a*(2025 – 1) = (2025 -1)*(2025 + 1 + a) = 0$, $a = -2026$. По теореме Виета сумма корней квадратного уравнения равна –a. Таким образом, $x_1+x_2= - a = 2026$.

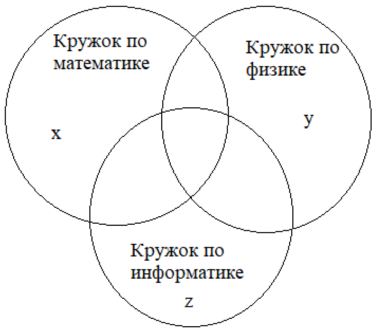
Критерии проверки:

- Верный ответ – 1 балл

- Верное решение и верный ответ – 7 баллов.

3. В Центре имеется три кружка: по математике, по физике и по информатике. Директор как-то заметил, что среди участников кружка по математике ровно 1/6 часть ходит еще и на кружок по физике, а 1/8 часть – на кружок по информатике; среди участников кружка по физике равно 1/3 ходит еще и на кружок по математике, а ровно 1/5 – на кружок по информатике; наконец, среди участников кружка по информатике ровно 1/7 часть ходит на кружок по математике. А какая часть участников кружка по информатике ходит на кружок по физике ?

Решение: Пусть участников кружка по математике – x человек, кружка по физике – y человек, по информатике – z человек.



Тогда $\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{3} \\ \frac{z}{7} = \frac{x}{8} \\ \frac{y}{5} = a \end{cases}$

Перемножим все три уравнения и сократим на x и y обе части. Получим a· 1/24 = z· 1/210. Тогда a = z*24/210 = z*4/35.

Ответ: 4/35

Критерии проверки:

- Верный ответ – 1 балл
- Составлена система уравнений – 2балла.
- Верное решение и верный ответ – 7 баллов.

4. Имеется веревка длиной Lметров. Эту веревку каким-то образом разрезали на две части. Всегда ли можно из образовавшихся частей веревки вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6, 12 и 24 метров, если

a) L = 49;
b) L = 48,99 ?

Решение. а) Нужные куски всегда можно получить. Выберем из двух кусков больший, он имеет длину не менее 24,5 м, от него отрежем 24 м. Останется два куска общей длиной 25 м. Больший из них имеет длину не менее 13 м. Отрежем от него 12 м.

Останется два куска общей длиной 13 м. Больший из них имеет длину не менее 6,5 м. Отрежем от него 6 м.
Останется два куска общей длиной 7 м. Больший из них имеет длину не менее 3,5 м. Отрежем от него 3 м.
Останется два куска общей длиной 4м. Больший из них имеет длину не менее 2 м. Отрежем от него 2м.
Останутся два куска общей длиной 2 м. Больший из них имеет длину не менее 1м. Отрежем от него 1м.

b) Разрежем веревку длиной 48,99 м на два куска 0,995 и 47,995. Из меньшего куска ничего отрезать нельзя. А сумма всех кусков 1+2+3+6+12+24 = 48. Следовательно, из куска длиной 47,995 их отрезать также нельзя.

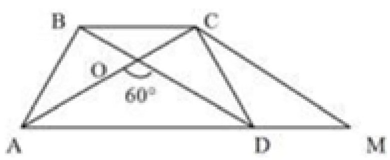
Критерии проверки:

- Верный ответ без каких-либо обоснований в каждом пункте – 0 баллов
- Верный ответ в пункте а) с разбором частного случая – 0 баллов.
- Верное решение пункта а) – 4 балла
- Верный ответ в пункте b), пример разрезания без доказательства невозможности – 1балл.
- Верный ответ в пункте b), пример разрезания с доказательством невозможности – 3 балл.
- Максимальный балл за задачу – 7 баллов

5. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная.

Решение

Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что ΔACM - равносторонний. Но это значит, что ΔAOD и ΔBOC - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что ΔAOB = ΔCOD, откуда имеем, что AB = CD.



Критерии проверки:

- Верное решение – 7 баллов