Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

8 класс

1. В семи пакетах лежат конфеты. В первом - 3, во втором - 4, в третьем, в четвёртом, в пятом, шестом и седьмом - по 14 . Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. За какое наименьшее число перекладываний можно добиться равного числа конфет во всех пакетах?

Решение. Ответ: за 6.
Всего конфет 77 и должно стать по 11 в каждом пакете. В пяти пакетах по 14, что больше 11, и эти пакеты участвуют в перекладываниях на уменьшение до 11. Значит, перекладываний не менее 5, из каждого из этих пакетов надо переложить по 3 в два первых. Но в первый пакет надо переложить 8, а во второй – 7. Потому, из одного из пакетов придется перекладывать два раза. Из пакетов со третьего по седьмой - в первый и второй.

Критерии проверки:

- Приведен пример шести перекладываний – 2 балла
- Приведен пример шести перекладываний и показано, что из каждого пакета с третьего по седьмой хотя бы один раз надо переложить, т.к. в них по 14 конфет, а надо по 11 – 4 балла.
- Приведен пример шести перекладываний и показано, что из каждого пакета с третьего по седьмой хотя бы один раз надо переложить, т.к. в них по 14 конфет, а надо по 11. Но при этом из каждого из этих пакетов надо переложить по три конфеты, а в первом и втором пакетах количество конфет на три не делится. Следовательно, хотя бы из одного из пакетов с 3-го по 7-й придется делать два перекладывания - 7 баллов

2. Можно ли вместо клеточек в каком-то порядке поставить шесть последовательных натуральных чисел, чтобы равенство

$$\square*\square*\square + \square*\square*\square = 11111$$

стало верным?

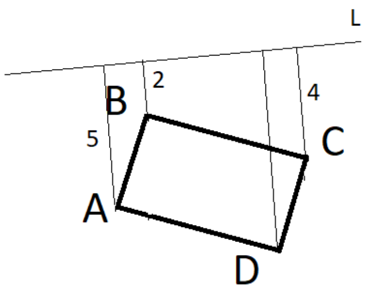
Решение. Ответ: Нельзя.

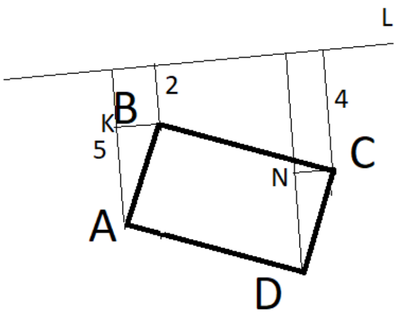
Сумма нечётна, значит, одно слагаемое чётно, другое нечётно. Из шести последовательных чисел - три чётных и три нечётных. Нечётное слагаемое состоит из произведения трёх нечётных чисел, чётное - из произведения трёх чётных. Оба слагаемых будут делиться на 3, так как одно нечётное и одно чётное число из шести последовательных кратны 3. Но сумма на 3 не делится.

Критерии проверки:

- Только ответ – нельзя – 0 баллов
- Если замечено, что одно из слагаемых -четно, а второе – нечетно – 1 балл
- Если доказано, что в одном из слагаемых только четные числа, а во втором – только нечетные - 3 балла
- Если доказано, что оба слагаемые делятся на 3 - 6 баллов
- Если доказано, что оба слагаемые делятся на 3, а 11111 – не делится на 3 - 7 баллов

2. Прямая *L* не пересекает прямоугольник ABCD (см. рисунок). Расстояния от точек A, B и C до прямой L равны 5 см, 2 см и 4 см соответственно. Найдите расстояние от точки D до прямой *L*.





Решение: Проведем параллельно Lпрямые BKи CN. Заметим, что треугольники ABKи DCN - равны и прямоугольные. DN = AK = 5-2 = 3. Значит, расстояние от точки D до прямой L равно 3 + 4 = 7.

Критерии проверки:

- Только ответ – 1 балл.
- Верное решение – 7 баллов

4. В трехзначном числе $\overline{abc}$ зачеркнули первую цифру и получили двузначное $\overline{bc}$. Если $\overline{abc}$ поделить на $\overline{bc}$, то частное будет равно 6, а остаток 5. Найдите число $\overline{abc}$. (Приведите все возможные такие трехзначные числа и докажите, что других нет).

Решение. $\overline{abc} = 6*\overline{bc} + 5$, $\overline{abc} = 100a + \overline{bc}$

$100a + \overline{bc} = 6*\overline{bc} + 5$

$100a = 5*\overline{bc} + 5$

$20a = \overline{bc} + 1$

Если a = 1, то $\overline{bc} = 19$, $\overline{abc} = 119$

Если a = 2, то $\overline{bc} = 39$, $\overline{abc} = 239$

Если a = 3, то $\overline{bc} = 59$, $\overline{abc} = 359$

Если a = 4, то $\overline{bc} = 79$, $\overline{abc} = 479$

Если a = 5, то $\overline{bc} = 99$, $\overline{abc} = 599$

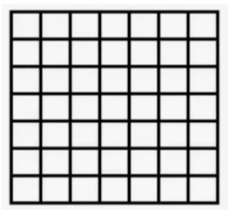
Если a > 5, то $\overline{bc} > 100$, такого не может быть

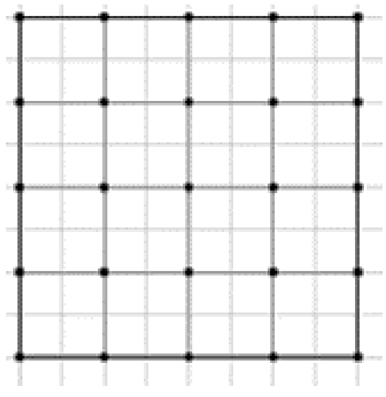
Ответ: 119, 239, 359, 479, 599

Критерии проверки:

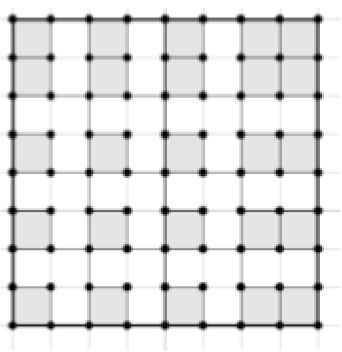
- Если приведены ответы, но не все, и нет рассуждений – 1 балл.
- Если приведены все ответы и нет рассуждений – 2 балла.
- Верное решение – 7 баллов

5. Петя хочет закрасить несколько клеток квадрата 8х8 так, чтобы для любой вершины (точка пересечения горизонтальной и вертикальной линий) нашелся закрашенный квадрат, которому она принадлежит. Какое наименьшее число квадратов он должен закрасить?





Решение. Отметим 25 вершин квадрата 8х8 (см. рис. слева). При каждой отмеченной вершине должен быть закрашенный квадрат. Каждый квадрат



задевает только одну такую вершину. Значит их не менее 25. Пример показан на рисунке справа, и указанные 25 закрашенных квадратов задевают все вершины сетки. Пример может быть и другой.

Критерии проверки:

- Приведен пример на 25 квадратов - 3 балла
- Доказано, что квадратов не менее 25 – 4 балла
- Доказано, что квадратов не менее 25, приведен пример на 25 квадратов – 7 баллов.