Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

7 класс

1. a и b – целые положительные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

1) a+1 делится на b,
2) a равно 2b+5,
3) a+b делится на 3,
4) a+7b – простое число,

три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары a, b.

Решение. Рассмотрим утверждения 3) a+b делится на 3 и 4) a+7b – простое число. a+7b = a + b + 6b - делится на 3 и больше a+b. Значит, не может быть простым. Следовательно, утверждения 3) или 4) – ложные, а утверждения 1) и 2) – верные. Значит, a = 2b+5, a+1 = 2b+6делится на b. Откуда получаем, что 6 делится на b, т.е. b может быть равно 1, 2, 3 или 6. Тогда

если b = 1, то a = 7, a + b = 8 - не делится на 3, a+7b = 14 – не простое;

если b = 2, то a = 9, a + b = 11 - не делится на 3, a+7b = 23 – простое;

если b = 3, то a = 11, a + b = 14 - не делится на 3, a+7b = 32 – не простое;

если b = 6, то a = 17, a + b = 23 - не делится на 3, a+7b = 59 – простое.

Таким образом, возможны две пары – a=9, b = 2 или a=17, b = 6.

Критерии проверки:

1 балл	найдена одна из пар;
2 балла	найдены обе пары;
2 балла	показано, что 3 и 4 утверждения одновременно верными быть не могут
4 балла	показано, что 3 и 4 утверждения одновременно верными быть не могут и найдена одна из пар
5 баллов	Найдены обе пары и показано, что 3 и 4 утверждения одновременно верными быть не могут
7 баллов	Полное решение

2. *Назовем натуральное число троекратным, если все его цифры различны, и при добавлении в его десятичную запись любой его цифры получается число кратное 3. Сколько существует троекратных трехзначных чисел ?*

Решение. Число делится на 3, если сумма цифр делится на 3. Если в троекратном числе есть цифры, дающие разные остатки при делении на 3, то при добавлении этих цифр в запись числа, мы получим числа с суммой цифр, дающей разные остатки при делении на 3. А значит, что эти числа одновременно не могут делится на 3. Следовательно, все цифры в записи троекратного числа дают одинаковые остатки при делении на 3. Так как мы ищем трехзначные троекратные числа, то при добавлении четвертой цифры получаем четырехзначное число, все цифры которого имеют одинаковые остатки при делении на 3. А значит, эти остатки равны 0. Следовательно, наше число составлено из цифр 0, 3, 6 и 9 и все цифры в этом числе различны. Перечислим эти числа: 306, 309, 360, 369, 390, 396, 603, 609, 630, 639, 690, 693, 903, 906, 930, 936, 960, 963. Таких чисел – 18.

Критерии проверки:

1 балл	Только ответ или приведены некоторые примеры
2 балла	Без доказательства делается утверждение, что числа состоят из цифр 0,3,6,9 и приводятся не все такие числа
4 балла	Без доказательства делается утверждение, что числа состоят из цифр 0,3,6,9 и приводятся все такие числа
7 баллов	Полное обоснованное решение

3. *Раскрасьте клетки таблицы 5х5 в a) в 5 цветов; b) в 6 цветов так, чтобы в каждом ряду из 5 клеток – по вертикали, диагонали и горизонтали – встречались клетки только двух цветов.*

Решение.

a)

2	1	1	1	2
1	1	4	1	1
1	5	1	5	1
1	1	4	1	1
2	1	1	1	2

b)

1	1	1	4	1
3	1	1	1	1
1	1	2	1	1
1	1	1	1	5
1	6	1	1	1

Критерии оценки

7 баллов	Есть подходящий пример в каждом случае
3 балла	Только за один пример
0 баллов	Остальное

4. *Отличник Петя любит пятерки. В ряду натуральных чисел от 1 до 2024 он решил посчитать количество чисел, делящихся на 5 или содержащих цифру 5. Сколько таких чисел он насчитал?*

Решение. Посчитаем все такие числа

В первой сотне чисел, в записи которых есть «5» - 19, а чисел, в записи которых нет «5», но они делятся на 5, - 8.

Рассмотрим в первой тысяче числа вида $\overline{**a}$:

Если а = 5 или 0, то таких чисел 100 и 99, соответственно, Всего 199.

Если а отлично от 0 и 5, то таких чисел с учетом $\overline{00a}$ по 19. Всего 8*19 = 152.

Рассмотрим во второй тысяче числа вида $\overline{1**a}$:

Если а = 5 или 0, то таких чисел 100 и 100, соответственно, Всего 200.

Если а отлично от 0 и 5, то таких чисел с учетом $\overline{00a}$ по 28. Всего 8*19 = 152.

Искомые числа в диапазоне от 2000 до 2024: 2000, 2005, 2010, 2015, 2020 – 4 числа.

Итого: 199+152+200+152+5 = 708

Критерии проверки:

1 балл	Только верный ответ
1 балл	Ответ неверный, но верно и обоснованно посчитано, сколько таких чисел в первой сотне
3 балла	Ответ неверный, но верно и обоснованно посчитано, сколько таких чисел в первой тысяче.
7 баллов	Обоснованно получен верный ответ

5. *Прогульщик Вася в каждый понедельник ноября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник – по два урока, в каждую среду – по три урока, в каждый четверг – по четыре урока, и в каждую пятницу – по пять уроков. Могло и оказаться так, что за весь ноябрь он пропустил ровно 64 урока ?(Все субботы и воскресенья ноября были выходными, а остальные дни – учебными, в ноябре 30 дней.)*

Решение. Нет, не могло. Предположим, что Вася прогулял ровно 64 урока. Заметим, что ноябрь содержит ровно четыре полные недели и еще два подряд идущих дня. За одну полную неделю он прогуливает 1+2+3+4+5 = 15 уроков. Тогда за четыре недели прогуливает 60 уроков. Тогда за два подряд идущих оставшихся дня он должен прогулять 4 урока, но это невозможно: 1+2 = 3, 2+3 = 5, 3+4 = 7, 4+5 = 9, 5+1 = 6. Значит, Вася не мог прогулять ровно 64 урока.

Критерии проверки:

0 баллов	Только верный ответ
1 балл	Ответ неверный, но верно посчитано количество прогулянных уроков за неделю.
2 балла	Ответ неверный, но замечено, что есть четыре полных недели, и верно посчитано количество прогулянных уроков за четыре полных недели.
6 баллов	Ответ верный, замечено, что есть четыре полных недели, и верно посчитано количество прогулянных уроков за четыре полных недели, но не показано, что оставшиеся два дня не могут дать четыре урока.
7 баллов	Обоснованно получен верный ответ.