Материалы для проведения регионального этапа

XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Первый день

4–5 февраля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **4 февраля 2022 г.** (I тур) и **5 февраля 2022 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2021–2022 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? (*П. Кожевников*)

Ответ. Может.

Решение. Пример: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20$. В этом наборе три числа $(5, 10, 20)$ делятся на 5, четыре числа $(4, 8, 12, 20)$ делятся на 4, а общая сумма равна 71.

Замечание. Можно доказать (но, конечно, в задаче этого не требуется), что на самом деле в любом примере, удовлетворяющем условию задачи, должны обязательно присутствовать числа $1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12$ и 20, а вместо числа 6 можно взять 7 или 9.

Комментарий. Для получения полного балла (7 баллов за задачу) достаточно наличие верного примера без указания, какие числа делятся на 4 и 5, явный подсчёт суммы тоже не требуется. Любой неработающий пример оценивается в 0 баллов.

9.2. На доске девять раз (друг под другом) написали некоторое натуральное число N. Петя к каждому из 9 чисел приписал слева или справа одну ненулевую цифру; при этом все приписанные цифры различны. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди 9 полученных чисел? (*И. Ефремов*)

Ответ. 6.

Решение. Пусть S — сумма цифр числа N. Тогда суммы цифр полученных чисел будут равны $S + 1$, $S + 2$, $\ldots$, $S + 9$. Три из этих сумм будут делиться на 3. По признаку делимости на 3, соответствующие три числа на доске также будут делиться на 3. При этом они будут больше 3, а значит, будут составными. Поэтому больше 6 простых чисел на доске оказаться не может.

Шесть простых чисел может оказаться даже при $N = 1$ —

например, если Петя получит, среди прочих, числа 11, 13, 41, 61, 17 и 19.

Замечание. Петя может получить шесть простых чисел, даже если он будет приписывать цифры лишь с одной стороны — например, из числа $N = 3$ он может получить числа 13, 23, 43, 53, 73 и 83.

Комментарий. Только приведён пример, в котором на доске оказалось 6 простых чисел — 2 балла.

Доказано только, что больше шести простых чисел получиться не могло — 5 баллов.

9.3. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a) - P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел (c, d), что разность $P(c) - P(d)$ также является квадратом натурального числа. *(Н. Агаханов)*

Решение. Пусть $P(x) = ux^2 + vx + w$. По условию,

$$(a-b)(u(a+b)+v) = (ua^2+va+w) - (ub^2+vb+w) = \\ = P(a) - P(b) = n^2.$$

Поскольку n — натуральное число, $a - b \neq 0$. Будем искать подходящие пары чисел (c, d) в виде $c = a + k$ и $d = b - k$. Тогда разность $P(c) - P(d)$ будет равна

$$(c-d)(u(c+d)+v) = (a-b+2k)(u(a+b)+v) = \frac{a-b+2k}{a-b}\,n^2.$$

Таким образом, нам достаточно подобрать такие k, для которых дробь $\dfrac{a-b+2k}{a-b}$ будет квадратом натурального числа. При $k = (a-b)m$ дробь будет равна нечётному числу $2m+1$. Тогда нам подойдут те m, при которых $2m+1$ будет квадратом нечётного числа.

Замечание. Заметим, что у многочлена из условия некоторые (или даже все!) коэффициенты могут оказаться иррациональными. Например, условие выполнено для многочлена $P(x) = ux^2 + (1-u)x - u$ и чисел $a = -1$, $b = 2$, где u — произвольное число.

Заметим, что если число u иррационально, то выражение

$P(c) - P(d)$ может оказаться целым *только* при $c + d = a + b$ или $c = d$.

Комментарий. В решении существенно используется, что коэффициенты многочлена рациональны — 0 баллов.

В решении высказана идея, что требуемые пары (c, d) надо искать с соблюдением условия $c + d = a + b$ — 2 балла.

9.4. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

(*Е. Бакаев*)

Ответ. 101.

Решение. Во всех решениях ниже мы рассматриваем граф дружб, в котором вершины — это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Если граф — это цикл, содержащий 101 вершину, то на любых 100 вершинах ровно 99 рёбер, так что такая компания удовлетворяет условиям задачи. Осталось показать, что не существует такой компании из 102 человек (тогда и компании из более чем 102 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим несколько различных способов сделать это; в каждом способе мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Первое решение. Рассмотрим произвольное множество из 101 вершины и индуцированный подграф на этих вершинах, пусть в нём k рёбер. Выбрасывая из этого подграфа произвольную вершину (скажем, степени d), получаем 100 вершин с нечётным количеством рёбер $k - d$. Значит, степень любой вершины в нашем подграфе имеет чётность, отличную от чётности k, то есть степени всех вершин подграфа имеют одну и ту же чётность. Но, как хорошо известно, в графе из нечётного числа вершин все вершины не могут иметь нечётную степень. Поэтому все эти степени чётны, а число рёбер k нечётно.

Пусть теперь во всём графе на 102 вершинах ℓ рёбер. При выкидывании любой вершины (скажем, степени d) получается подграф с нечётным числом рёбер $\ell - d$; аналогично рассуждению выше получаем, что и во всём графе степени всех вершин имеют одинаковую чётность. Заметим, что наш граф не может быть пустым (т.е. не иметь рёбер) или полным (т.е. иметь все C_{102}^2 рёбер), иначе на любых 100 вершинах будет либо 0, либо $C_{100}^2 = 99 \cdot 50$ рёбер, то есть чётное количество. Тогда найдётся вершина, соединённая хоть с какой-то другой вершиной, но не со всеми. Иначе говоря, есть вершины u, v_1 и v_2 такие, что u соединена с v_1, но не с v_2. Степени вершин v_1 и v_2 в исходном графе одной чётности, поэтому после удаления u они будут иметь разную чётность. Это невозможно по доказанному выше.

Второе решение. Существует всего $n = C_{102}^2 = 51 \cdot 101$ способов выбросить две вершины из 102, оставив 100. Пронумеруем эти способы числами от 1 до n. Пусть a_i — количество рёбер на оставшихся 100 вершинах в i-м способе; по предположению, все числа a_i нечётны, а значит, нечётна и их сумма S (поскольку число n нечётно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро uv. Это ребро учтено в числе a_i ровно тогда, когда вершины u и v не выброшены в i-м способе, то есть когда выброшена какая-то пара из оставшихся 100 вершин. Это происходит в $k = C_{100}^2 = 50 \cdot 99$ способах. Итак, каждое ребро учтено в S чётное количество k раз, поэтому S должно быть чётным. Противоречие.

Третье решение. Назовём вершину *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной* иначе. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть общее количество рёбер в графе нечётно. Тогда, выкидывая любую пару вершин, мы должны выкинуть из графа чётное число рёбер (чтобы осталось нечётное число). С другой стороны, если мы выкидываем вершины со степенями d_1 и d_2, то число выкинутых рёбер равно $d_1 + d_2$, если эти вершины не соединены ребром, и $d_1 + d_2 - 1$, если соединены. Отсюда следует, что вершины одинаковой чётности всегда не соединены ребром, а вершины разной чётности — всегда соединены.

Значит, если в графе k чётных вершин и ℓ нечётных, то чётные вершины имеют (чётную) степень ℓ, а нечётные — (нечётную) степень k. Это невозможно, ибо $k + \ell = 102$.

Случай 2. Пусть общее количество рёбер в графе чётно. Аналогично получаем, что вершины одинаковой чётности всегда соединены ребром, а вершины разной чётности не соединены. Поэтому, если в графе k чётных вершин и ℓ нечётных, то чётные вершины имеют (чётную) степень $k-1$, а нечётные — (нечётную) степень $\ell-1$. Это опять же противоречит равенству $k+\ell=102$.

Замечание. Разумеется, существуют и другие примеры компании из 101 человека, удовлетворяющей условию.

Комментарий. Утверждение о том, что в любом графе чётное количество вершин нечётной степени, принимается без доказательства.

Только ответ — 0 баллов.

Только приведён пример компании из 101 человека, удовлетворяющей условию — 1 балл.

Замечено только, что для завершения решения достаточно показать, что в компании не может быть *ровно* 102 человека — баллы не добавляются. Если это соображение упущено в решении — баллы не снимаются.

Доказано только, что в компании не может быть 102 человек — 6 баллов.

Ниже перечислены некоторые продвижения в доказательстве этого факта. Баллы за разные продвижения *не складываются*; к ним может добавляться 1 балл за верный пример компании из 101 человека.

Доказано только, что в любой компании из 101 человек, удовлетворяющей условию, все степени вершин имеют одинаковую чётность — 2 балла.

Помимо этого, доказано, что во всей компании из 102 человек все вершины имеют одинаковую чётность — 4 балла.

Доказано, что граф — либо полный двудольный, либо объединение двух полных графов (как показано в третьем решении) — 4 балла.

Если один из вышеупомянутых случаев упущен (без достаточных на то оснований) — 3 балла вместо 4.

Разобран до конца лишь один из двух случаев из третьего решения — 4 балла.

9.5. Пусть CE — биссектриса в остроугольном треугольнике ABC. На внешней биссектрисе угла ACB отмечена точка D, а на стороне BC — точка F, причём $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CEF, лежит на прямой BD. (*И. Фролов*)

Решение. Во всех решениях ниже окружность, описанная около треугольника CEF, обозначается через ω, а её центр — через O.

Первое решение. Внешняя (CD) и внутренняя (CE) биссектрисы угла ACB перпендикулярны. Тогда $\angle DAE = \angle DCE = 90^\circ$, и четырёхугольник $ADCE$ вписан. Поэтому $\angle ADE = \angle ACE$, откуда $\angle BEF = 180^\circ - \angle AED - \angle DEF = 90^\circ - \angle AED = \angle ADE = \angle ACE = \angle ECF$. Значит, ω касается AB (в точке E; см. рис. 1).

Выберем на отрезке BC такую точку P, что $PE \parallel AC$. Тогда $\angle PEC = \angle ECA = \angle PCE$, откуда $PC = PE$. Поскольку $OC = OE$, получаем, что PO — биссектриса внешнего угла BPE.

Совершим гомотетию с центром B, переводящую треугольник BPE в BCA. Тогда прямая PO перейдёт в CD, а прямая EO (перпендикулярная AB) — в AD. Значит, точка O перейдёт в D, откуда и следует, что точка O лежит на BD.

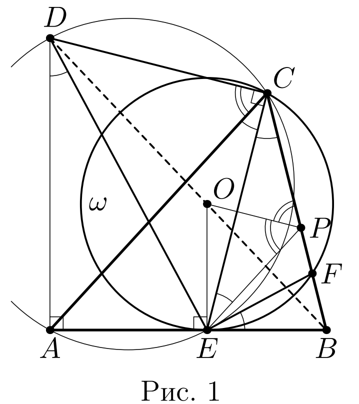

Рис. 1

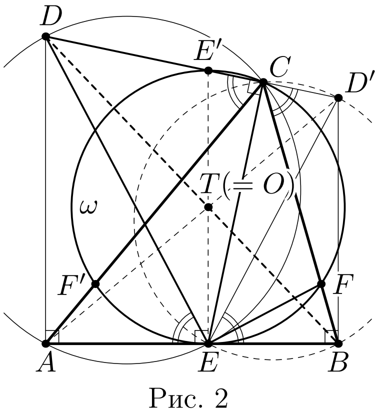

Рис. 2

Второе решение. Выберем на прямых CD и AC точки D' и F' так, что $\angle ABD' = \angle D'EF' = 90^\circ$ (см. рис. 2). Как и выше, докажем, что окружность ω касается AB. Аналогично, описанная окружность треугольника CEF' также касается AB в точке E (и тоже проходит через C). Поэтому эти окружности совпадают, то есть F' лежит на ω.

Докажем, что центром ω является точка T пересечения диагоналей BD и AD' трапеции $ADD'B$. Заметим сразу, что из вписанных четырёхугольников $ADCE$ и $BD'CE$ получаются равенства $\angle AED = \angle ACD = \angle BCD' = \angle BED'$, так что прямоугольные треугольники AED и BED' подобны, и $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD'} = \frac{DT}{BT}$. Значит, $ET \parallel AD \parallel BD'$.

Пусть TE пересекает DD' в точке E'. Поскольку E' лежит на диаметре ω, проходящем через E, и $\angle ECE' = 90^\circ$, точка E' лежит на ω. Прямая EE' параллельна основаниям трапеции и проходит через точку пересечения диагоналей трапеции; как известно, в этом случае EE' делится точкой T пополам. Поскольку EE' — диаметр ω, получаем $T = O$.

Замечание. После доказательства того, что ω касается AB в точке E, существуют и другие способы продолжения решения. Приведём набросок одного из них.

Нетрудно видеть, что $\angle CEF = \angle CAE = \mu$. Отметим на луче BD точку X так, что $\angle BCX = 90^\circ - \angle CEF = \angle DAC$; тогда $\angle XCD = \angle CDA = \nu$. Применяя теорему синусов, можно получить, что

$$\frac{BX}{XD} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{\cos\mu}{\sin\nu} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{CA} = \frac{BE}{EA}\,.$$

Таким образом, точка X лежит на прямых EO и CO, то есть $O = E$ (если эти две прямые не совпадают, то есть $AC \neq BC$).

Комментарий. Только замечено, что четырёхугольник $ADCE$ вписан — 0 баллов.

Показано что окружность ω касается AB — 1 балл.

Если в целом верное решение не работает при $AC = BC$ (как в замечании выше) — снимается 1 балл.

10 класс

10.1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? (*П. Кожевников*)

Ответ. Может.

Решение. Пример: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20$. В этом наборе три числа $(5, 10, 20)$ делятся на 5, четыре числа $(4, 8, 12, 20)$ делятся на 4, а общая сумма равна 71.

Замечание. Можно доказать (но, конечно, в задаче этого не требуется), что на самом деле в любом примере, удовлетворяющем условию задачи, должны обязательно присутствовать числа $1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12$ и 20, а вместо числа 6 можно взять 7 или 9.

Комментарий. Для получения полного балла (7 баллов за задачу) достаточно наличие верного примера без указания, какие числа делятся на 4 и 5, явный подсчёт суммы тоже не требуется. Любой неработающий пример оценивается в 0 баллов.

10.2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), \quad P(c+a) = P(b), \quad P(a+b) = P(c).$$

(*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть d — абсцисса вершины параболы $y = P(x)$, так что прямая $x = d$ — ось симметрии параболы. Тогда для любых чисел t и s с суммой $2d$ (т.е. таких, что точки t и s симметричны относительно d) выполнено $P(t) = P(s)$. Таким образом, любая тройка попарно различных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 2d$, будет удовлетворять условию задачи. Можно взять, скажем, $a = \frac{2d}{3} - 1$, $b = \frac{2d}{3}$, $c = \frac{2d}{3} + 1$.

Комментарий. За использование (очевидного) факта, что существует тройка (или пара) попарно различных чисел с заданной суммой, баллы не снижаются.

Сформулировано условие, эквивалентное равенству $P(s) = P(t)$, т.е. показано, что $P(s) = P(t)$ означает $t = s$ или $t + s = 2d$ (иначе говоря, точки t и s симметричны относительно оси параболы) — 3 балла.

10.3. У Васи есть n конфет нескольких сортов, где $n \geqslant 145$. Известно, что если из данных n конфет выбрать любую группу, содержащую не менее 145 конфет (в частности, можно выбрать группу из всех данных n конфет), то существует такой сорт конфет, что выбранная группа содержит в точности 10 конфет этого сорта. Найдите наибольшее возможное значение n. (*А. Антропов*)

Ответ. 160.

Решение. *Оценка.* Докажем, что $n > 160$ «не работает».

Пусть дан набор из n конфет. Назовем сорт *критическим*, если конфет этого сорта ровно 10 (среди всех данных n конфет). Пусть у нас k критических сортов, тогда всего конфет не менее $10k$: $n \geqslant 10k$. Уберем по одной конфете каждого критического сорта и организуем группу из оставшихся $n - k$ конфет. Для этой группы нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Кроме того, $n - k \geqslant n - \frac{n}{10} = \frac{9n}{10} > \frac{9 \cdot 160}{10} = 144$. Значит, в рассматриваемой группе не менее 145 конфет, поэтому условие задачи не выполняется.

Пример. Теперь приведём пример ситуации, в которой у Васи может быть 160 конфет. Пусть у него есть ровно по 10 конфет 16 сортов. Пусть выбрана группа, для которой нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Тогда в эту группу не входит хотя бы одна конфета каждого сорта (иначе говоря, ни один сорт не будет взят полностью), т.е. группа содержит не более $16 \cdot 9 = 144$ конфет, значит, условие задачи выполнено.

Замечание 1. Оценка $n \leqslant 160$ может быть доказана также следующим, несколько другим способом. Предположим, что некоторое $n = 145 + m$ «работает», т.е. существует набор K_0 из n конфет, удовлетворяющий условию задачи. Тогда в наборе K_0 есть в точности 10 конфет некоторого сорта A_0. Уберем конфету a_0 сорта A_0 и рассмотрим группу K_1 из оставшихся $n - 1$ конфет. В группе K_1 есть в точности 10 конфет некоторого сорта A_1, при этом сорт A_1 отличен от A_0, так как в K_1 есть ровно 9 конфет сорта A_0. Уберем из K_1 конфету a_1 сорта A_1 и рассмотрим группу K_2 из оставшихся $n-2$ конфет, в котором найдем 10 конфет нового сорта A_3, и т.д., продолжим по шагам убирать по одной конфете и рассматривать группы оставшихся конфет. Так дойдем до группы K_m, состоящей из $|K_m| = 145$ конфет. При этом, согласно нашему алгоритму, K_0 содержит по 10 конфет сортов $A_0, \ldots, A_m$, значит $|K_0| \geqslant 10(m+1)$. Имеем $145 + m \geqslant 10(m+1)$, откуда $m \leqslant 15$ и $n \leqslant 160$.

Замечание 2. Пример при $n = 160$ единственный.

Комментарий. Баллы за оценку и пример суммируются.

Имеется только верный ответ без обоснований — 0 баллов.

Имеется верный пример для $n = 160$ и обоснование, что условие задачи для этого примера выполняется — 3 балла (в случае, когда верный пример предъявлен, но обоснование отсутствует, снимается 1 балл, т.е. ставится 2 балла вместо 3).

Имеется верное и полное доказательство оценки $n \leqslant 160$ — 4 балла (при наличии пробелов в доказательстве оценки баллы могут быть снижены до 3 или 2 баллов).

10.4. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где n — натуральное число. Известно, что числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые, при этом $a_n \neq 0$, $a_{n-k} = a_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n$, и $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$. Докажите, что число $P(2022)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1. (*Е. Холмогоров*)

Решение. Достаточно доказать *утверждение*: многочлен $P(x)$ делится на $(x-1)^2$. Действительно, после деления (например, столбиком), в частном получится многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами, и тогда равенство многочленов $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$ влечет равенство $P(2022) = 2021^2 \cdot Q(2022)$, из которого следует утверждение задачи, поскольку $Q(2022)$ — целое число.

Для доказательства утверждения сделаем замену $t = x - 1$, положим $R(t) = P(t+1) = a_n(t+1)^n + a_{n-1}(t+1)^{n-1} + \ldots + a_1(t+1) + a_0$ и докажем, что $R(t)$ делится на t^2, т.е. что последние два коэффициента многочлена $R(t)$ равны 0.

Свободный член многочлена R равен $R(0) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0$.

Поскольку в многочлене $(t+1)^k$ коэффициент при t равен

k, коэффициент при t многочлена R равен $na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + a_1$. Из условий $a_{n-k} = a_k$ следует, что удвоенный коэффициент при t равен $(na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + a_1) + (na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1}) = n(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) = 0$.

Тем самым, задача решена.

Замечание. Утверждение о делимости $P(x)$ на $(x-1)^2$ можно доказать несколькими другими способами. Например:

1) Можно доказать, что при делении $P(x)$ на $x-1$ мы получаем многочлен $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$ такой, что $b_{n-1-k} = -b_k$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Отсюда последует $Q(1) = 0$, и тогда, в силу теоремы Безу, $Q(x)$ делится на $(x-1)$.

2) Можно заметить, что $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$.

Комментарий. Доказано, что многочлен $P(x)$ делится на $x-1$ (или, эквивалентно, что $P(1) = 0$) и/или что $P(2022)$ делится на 2021 — 1 балл.

Если при этом утверждается (но не доказано), что многочлен $P(x)$ делится на $(x-1)^2$ (или, эквивалентно, что $P(1) = P'(1) = 0$) и/или что $P(2022)$ делится на 2021^2 (или 43^2, или 47^2) — 2 балла.

Факт «если многочлен P делится на многочлен Q, причём у P и Q коэффициенты целые, а у Q старший коэффициент равен 1, то в частном получается многочлен с целыми коэффициентами», считается известным, и за использование этого факта без доказательства баллы не снимаются.

10.5. В окружность Ω вписан шестиугольник $AECDBF$. Известно, что точка D делит дугу BC пополам, а треугольники ABC и DEF имеют общую вписанную окружность. Прямая BC пересекает отрезки DF и DE в точках X и Y, а прямая EF пересекает отрезки AB и AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что точки X, Y, T, Z лежат на одной окружности. (*Д. Бродский*)

Решение. Отметим точку I — центр общей вписанной окружности ω треугольников ABC и DEF. Поскольку D — середина дуги BC, точки A, I, D лежат на одной прямой. Окружность ω вписана в угол $\angle FDE$, поэтому DI — биссектриса угла $\angle FDE$, а точка A — середина дуги FE.

Заметим, что четырёхугольник $FEYX$ вписанный. Это сле-

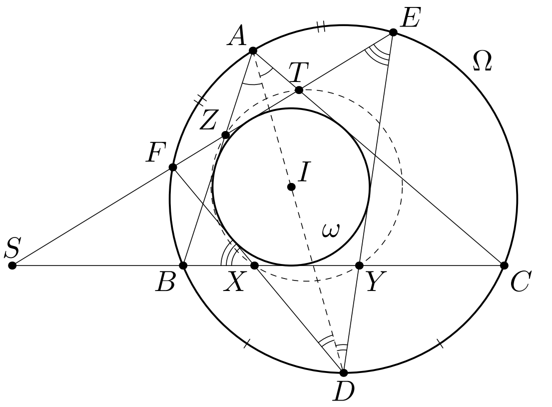

Рис. 3

дует из равенства углов $\angle FED = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{CD}) = \angle FXB$. Аналогично, четырёхугольник $BCTZ$ — вписанный.

Если $BC \parallel EF$, то конструкция симметрична относительно прямой AD, и утверждение задачи очевидно. Иначе отметим точку S пересечения прямых FE и BC. Приравнивая произведения отрезков секущих для окружностей Ω, $(BCTZ)$ и $(FEYX)$ (т.е. степени точки S относительно этих трех окружностей), имеем: $SX \cdot SY = SF \cdot SE = SB \cdot SC = SZ \cdot ST$. Доказанное равенство $SX \cdot SY = SZ \cdot ST$ означает, что X, Y, Z, T лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

Комментарий. Если в верном решении не рассмотрен случай $BC \parallel EF$, то баллы не снижаются. Если рассмотрен только этот случай, баллы не начисляются.

Оцениваются (и суммируются) следующие продвижения.

Доказано, что A — середина дуги FE — 1 балл.

Доказано, что $BCTZ$ и/или $FEYX$ — вписанный — 1 балл.

Введена в рассмотрение точка $S = BC \cap EF$ и записано равенство произведений длин секущих хотя бы для одной из окружностей Ω, $(BCTZ)$ и $(FEYX)$ — 1 балл.

11 класс

11.1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? (*П. Кожевников*)

Ответ. Может.

Решение. Пример: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20$. В этом наборе три числа $(5, 10, 20)$ делятся на 5, четыре числа $(4, 8, 12, 20)$ делятся на 4, а общая сумма равна 71.

Замечание. Можно доказать (но, конечно, в задаче этого не требуется), что на самом деле в любом примере, удовлетворяющем условию задачи, должны обязательно присутствовать числа $1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12$ и 20, а вместо числа 6 можно взять 7 или 9.

Комментарий. Для получения полного балла (7 баллов за задачу) достаточно наличие верного примера без указания, какие числа делятся на 4 и 5, явный подсчёт суммы тоже не требуется. Любой неработающий пример оценивается в 0 баллов.

11.2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a),\ P(c+a) = P(b),\ P(a+b) = P(c).$$

(*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть d — абсцисса вершины параболы $y = P(x)$, так что прямая $x = d$ — ось симметрии параболы. Тогда для любых чисел t и s с суммой $2d$ (т.е. таких, что точки t и s симметричны относительно d) выполнено $P(t) = P(s)$. Таким образом, любая тройка попарно различных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 2d$, будет удовлетворять условию задачи. Можно взять, скажем, $a = \frac{2d}{3} - 1$, $b = \frac{2d}{3}$, $c = \frac{2d}{3} + 1$.

Комментарий. За использование (очевидного) факта, что существует тройка (или пара) попарно различных чисел с заданной суммой, баллы не снижаются.

Сформулировано условие, эквивалентное равенству $P(s) = P(t)$, т.е. показано, что $P(s) = P(t)$ означает $t = s$ или $t + s = 2d$ (иначе говоря, точки t и s симметричны относительно оси параболы) — 3 балла.

11.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD и ACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120^\circ$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD. (*А. Заславский*)

Решение. Из условия задачи следует, что точки A, A', B, B' лежат в одной плоскости, поэтому прямые BA' и AB' пересекают ребро CD в одной точке X. Из условия следует, что эти прямые являются биссектрисами углов $CA'D$, $CB'D$ соответственно. Отсюда, по свойству биссектрисы, $CA' : A'D = CX : XD = CB' : B'D$, а поскольку $\angle CA'D = \angle CB'D = 120^\circ$, треугольники $CA'D$ и $CB'D$ подобны. Поскольку CD — общая сторона этих треугольников, эти треугольники равны. В этих равных треугольниках равны соответствующие высоты из вершин A' и B'. Это и требовалось доказать.

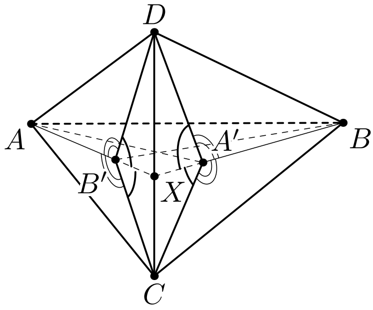

Рис. 4

Комментарий. Указано только, что прямые BA' и AB' пересекают ребро CD в одной точке — 1 балл.

Указано, что прямые BA' и AB' пересекают ребро CD в одной точке; и кроме того, доказано соотношение $CA' : A'D = CB' : B'D$ или подобие $CA'D \sim CB'D$ — 4 балла.

11.4. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании. (*Е. Бакаев, И. Богданов*)

Ответ. 102.

Решение. Во всех решениях ниже мы рассматриваем граф дружб, в котором вершины — это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Рассмотрим 102 вершины, и построим на них следующий граф. Одну вершину x соединим с тремя другими v_1, v_2, v_3. Остальные 98 вершин разобьём на пары и соединим вершины в каждой паре. Получился граф с $98/2+3 = 52$ рёбрами. При удалении любой вершины удаляется нечётное число рёбер, то есть остаётся также нечётное число. Поэтому компания, описанная в условии, может состоять из 102 человек.

Осталось показать, что не существует такой компании из 103 человек (тогда и компании из более чем 103 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим несколько различных способов сделать это; в каждом способе мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Первое решение. Существует всего $n = C_{103}^2 = 51\cdot 103$ способа выбросить две вершины из 103, оставив 101. Пронумеруем эти способы числами от 1 до n. Пусть a_i — количество рёбер на оставшихся 101 вершинах в i-м способе; по предположению, все числа a_i нечётны, а значит, нечётна и их сумма S (поскольку число n нечётно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро uv. Это ребро учтено в числе a_i ровно тогда, когда вершины u и v не выброшены в i-м способе, то есть когда выброшена какая-то пара из оставшихся 101 вершин. Это происходит в $k = C_{101}^2 = 50 \cdot 101$ способах. Итак, каждое ребро учтено в S чётное количество k раз, поэтому S должно быть чётным. Противоречие.

Второе решение. Назовём вершину *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной* иначе. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть общее количество рёбер в графе нечётно. Тогда, выкидывая любую пару вершин, мы должны выкинуть из графа чётное число рёбер (чтобы осталось нечётное число). С другой стороны, если мы выкидываем вершины со степенями d_1 и d_2, то число выкинутых рёбер равно d_1+d_2, если эти вершины не соединены ребром, и $d_1 + d_2 - 1$, если соединены. Отсюда следует, что вершины одинаковой чётности всегда не соединены ребром, а вершины разной чётности — всегда соединены.

Значит, если в графе k чётных вершин, то общее число рёбер равно $k(103-k)$, то есть чётно. Но мы предполагали, что это количество нечётно — противоречие.

Случай 2. Пусть общее количество рёбер в графе чётно. Аналогично получаем, что вершины одинаковой чётности всегда соединены ребром, а вершины разной чётности не соединены. Поэтому, если в графе k чётных вершин, то число *отсутствующих* рёбер равно $k(103-k)$, то есть чётно. Поэтому общее число рёбер есть $C_{103}^2 - k(103-k) = 103 \cdot 51 - k(103-k)$, то есть нечётно. Но мы предполагали, что это количество чётно.

Замечание 1. Разумеется, существуют и другие примеры компании из 102 человек, удовлетворяющей условию.

Замечание 2. Существует и такая вариация второго решения.

Рассмотрим произвольные 102 вершины и индуцированный подграф на этих вершинах, пусть в нём k рёбер. Выбрасывая из них произвольную вершину (скажем, степени d), получаем 101 вершину с нечётным количеством рёбер $k-d$. Значит, степень любой вершины в нашем подграфе имеет чётность, отличную от чётности k, то есть степени всех 102 вершин имеют одну и ту же чётность.

Рассмотрим теперь весь граф на 103 вершинах. Назовём вершину *чётной*, если после её удаления остаётся граф, в котором все степени вершин чётны, и *нечётной* иначе. Тогда две вершины одной чётности соединены с одними и теми же из остальных вершин, а две вершины разной чётности — с наборами вершин, дополняющими друг друга до всего множества из 101 оставшейся вершины. Отсюда несложно выяснить, как и во втором решении, что граф — либо полный двудольный, либо объединение двух полных графов. Далее можно действовать как и в этом решении.

Комментарий. Утверждение о том, что в любом графе чётное количество вершин нечётной степени, принимается без доказательства.

Только ответ — 0 баллов.

Только приведён пример компании из 102 человека, удовлетворяющей условию — 1 балл.

Замечено только, что для завершения решения достаточно показать, что в компании не может быть *ровно* 103 человека — баллы не добавляются. Если это соображение упущено в решении — баллы не снимаются.

Доказано только, что в компании не может быть 103 человек — 6 баллов.

Ниже перечислены некоторые продвижения в доказательстве этого факта. Баллы за разные продвижения *не складываются*; к ним может добавляться 1 балл за верный пример компании из 102 человека.

Доказано только, что в любой компании из 102 человек, удовлетворяющей условию, все степени вершин имеют одинаковую чётность — 2 балла.

Доказано, что граф — либо полный двудольный, либо объединение двух полных графов (как показано во втором решении) — 4 балла.

Если один из вышеупомянутых случаев упущен (без достаточных на то оснований) — 3 балла вместо 4.

Разобран до конца лишь один из двух случаев из второго решения — 4 балла.

11.5. Пусть S — 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10 000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S. К каждой из 1 000 000 отмеченных точек (x, y, z) прикрепим шарик с написанным на нём числом $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$. На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

(*П. Козлов*)

Ответ. $3 \cdot C_{100}^2 = 14\,850$.

Решение. Назовём тройку натуральных чисел (x, y, z), элементы которой принадлежат S, *хорошей*, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx). \qquad (*)$$

Таким образом, нам надо найти наибольшее возможное количество хороших троек.

Выясним, когда тройка хорошая. Перепишем $(*)$ как квадратное уравнение относительно x,

$$x^2 - 2x(y+z) + (y-z)^2 = 0.$$

Решая его, получаем

$$x = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2,$$

откуда $\sqrt{x} = \pm\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$. Иначе говоря, тройка является хорошей тогда и только тогда, когда одно из чисел $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ равно сумме двух других.

Пусть $s_1 < s_2 < \ldots < s_{100}$ — все элементы множества S. Положим $t_i = \sqrt{s_i}$. Оценим количество хороших троек (x, y, z), в которых z — наибольшее число, то есть $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Заметим, что при любых $1 \leqslant i < j \leqslant 100$ есть не более одной такой тройки, в которой $\sqrt{x} = t_i$ и $\sqrt{z} = t_j$ (по этим значениям восстанавливается $\sqrt{y} = \sqrt{z} - \sqrt{x}$). Поэтому оцениваемое количество не превосходит количества таких пар чисел (i, j), то есть C_{100}^2.

Аналогично, количества хороших троек, в которых наибольшими являются x и y, не превосходят C_{100}^2. Поэтому общее количество хороших троек не больше $3 \cdot C_{100}^2$.

Эта оценка достигается, если положить $s_i = i^2$, то есть $t_i = i$: действительно, тогда при любых $i < j$ найдётся хорошая тройка (s_i, s_{j-i}, s_j).

Замечание 1. Можно показать, что для того, чтобы оценка достигалась, необходимо выполнение равенств $t_i = it_1$ при всех i. Поскольку $1 \leqslant t_i \leqslant 100$, приведённый выше пример — единственный.

Замечание 2. Можно показать, что верен следующий **факт:** равенство $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ при натуральных x, y, z возможно лишь тогда, когда отношения x/z и y/z являются квадратами рациональных чисел, то есть когда $x = a^2t$, $y = b^2t$ и $z = c^2t$ при некоторых натуральных a, b, c и t (где $a + b = c$).

В приведённом выше решении этот факт не используется, но в работах некоторые школьники могут на него опираться.

Комментарий. Доказано, что тройка хорошая тогда и только тогда, когда одно из чисел $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ равно сумме двух других — 2 балла (эти баллы *не суммируются* с приведёнными ниже!).

Доказательство факта из замечания 2 баллов не добавляет.

Если дальнейшее верное решение использует этот факт без доказательства, снимается 1 балл.

Доказано, что хороших троек не больше, чем 14 850 — 6 баллов.

Только приведён пример, в котором ровно 14 850 хороших троек — 2 балла.