Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

10 класс

1. Десятичная запись суммы 1 + 11 + 111 + …+ 11…11 заканчивается на 2025. Какое наименьшее количество слагаемых может быть ?

Решение. Пусть S = 1 + 11 + 111 + …+ 11…11.Пусть минимальное число слагаемых равно n.Остаток при делении S на 10000 такой же, как и у суммы

1 + 11 + 111 + 1111*(n-3). Получаем равенство

$$1 + 11 + 111 + 1111*(n-3) = 10000*m + 2025,$$

где m – частное.

$n-3 = (10000*m + 2025 – 123)/1111 = 9m + \frac{m+1902}{1111} = 9m + 1 + \frac{m+791}{1111}$

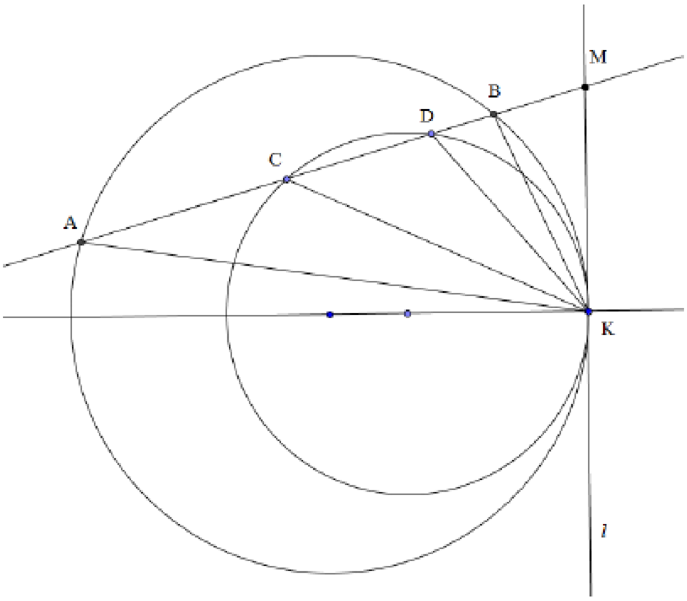
Наименьшее m, при котором $\frac{m+791}{1111}$ целое, равно 320. Следовательно, искомое nравно3 + 9*320 + 1 + 1 = 2885.

Ответ: 2885.

Критерии проверки:

- Верный ответ – 2 балла
- Верное решение – 7 баллов.

2. Две окружности касаются внутренним образом в точке *K*. Прямая пересекает большую окружность в точках *A* и *B*, а меньшую окружность в точках *C* и *D*. Точка *C* лежит между *A* и *D*. Докажите, что $\angle BKD = \angle AKC$.



Решение.

Пусть l – общая касательная к окружностям в точке K, $l \cap (AB) = M$.

$\angle BKD = \angle DKM - \angle BKM$.

$\angle BKM$ - угол между касательной и секущей большей окружности. Следовательно, $\angle BKM = \angle BAK$.

$\angle DKM$ - угол между касательной и секущей меньшей окружности. Следовательно, $\angle DKM = \angle DCK$.

Итак, $\angle BKD = \angle DCK - \angle BAK$.

Из ΔACK

$\angle AKC = 180^\circ - \angle BAK - \angle ACK = 180^\circ - \angle BAK - (180^\circ - \angle DCK) =$

$= \angle DCK - \angle BAK = \angle BKD$,

что и требовалось доказать.

Критерии проверки:

- Верное решение – 7 баллов.

3. Неотрицательные числа a,b,c,d таковы, что

$$a+b+c+d = 4.$$

Найдите наибольшее возможное значение суммы ab+bc + cdи определите все четверки чисел a,b,c,d, для которых максимальное значение достигается.

Решение.

Оценим сумму S, добавив к ней неотрицательное число da :

$$S = ab + bc + cd \leqslant (ab + bc) + (cd + da) = (a + c)(b + d)$$

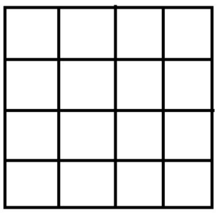
Учтём, что $b + d = 4 - (a + c)$, и обозначим $x = a + c$, тогда

$$S \leqslant x(4 - x) \leqslant 4 \quad \Longleftarrow \quad 0 \leqslant (x - 2)^2$$

Наибольшее значение $S = 4$ достигается, например, при $a = b = 2$ и $c = d = 0$.

Критерии проверки:

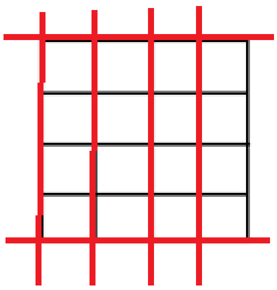
- Указано наибольшее значение - 2 балла.
- Указано наибольшее значение, приведен пример значенийа,b,c,d, на котором максимум достигается, - 3 балла
- Полное решение - 7 баллов.



4. На плоскости нарисован квадрат 4x4 клетки. По линиям образовавшейся сетки Вася проводит несколько горизонтальных и вертикальных прямых красным карандашом. Какое наибольшее число прямых он может провести так, чтобы при этом не образовалось ни одного квадрата, все стороны которого красные?

Решение. Докажем, что семь прямых провести нельзя. Если есть семь прямых, то по крайней мере четыре из них параллельны (пусть- горизонтальные) . Пять горизонтальных быть не может, т.к. две вертикальных точно образуют квадрат. Пусть горизонтальных четыре. Тогда среди них найдутся две соседние (на расстоянии в 1 клетку) и две, находящиеся на расстоянии 2. Тогда среди трех вертикальных найдутся две либо на расстоянии 1, либо на расстоянии 2. И при этом образуется квадрат.

Пример для шести прямых



Критерии проверки:

- Верный ответ – 0 баллов.
- Верный ответ и пример прямых, на котором это достигается, - 2 балла
- Доказательство, что семь прямых нельзя, - 5 баллов.
- Верный ответ, пример и оценка – 7 баллов.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x} = y + z \\ \dfrac{1}{2y} = z + x \\ \dfrac{1}{2z} = x + y \end{cases}$$

Решение. Вычтем из первого уравнения второе

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = y - x$$

$$\frac{y - x}{2yx} = y - x$$

Откуда получаем два случая 1) x = y, 2) 2yx = 1

В первом случае получаем x = y , $\frac{1}{2x} = x + z, \frac{1}{2z} = 2x$. Тогда 2z = x + z, т.е. x=z. Тогда x = y = z, откуда $\frac{1}{2x} = 2x$, $x = \frac{1}{2}$.

Тогда $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Во втором случае $xy = \frac{1}{2}$.Из первого уравнения получаем $\frac{1}{2} = yx + zx$. Откуда z = 0. Чего не может быть.

Ответ: $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Критерии проверки:

- Верный ответ – 1 баллов.
- Верный ответ и разбор только первого случая - 4 балла
- Верное решение – 7 баллов