Всероссийская олимпиада школьников

Муниципальный этап

11 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1; \\ \dfrac{yz}{y+z} = 2; \\ \dfrac{xz}{x+z} = 3. \end{cases}$$

Решение. «Перевернем» каждое из уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = 1 \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Решим систему как линейную относительно 1/x, 1/y, 1/z. Получим 1/x= 5/12, 1/y=7/12, 1/z=-1/12.

Ответ: x=12/5, y = 12/7, z = -12.

Критерии:

- Полное решение - 7 баллов.
- Только ответ – 2 балла.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x} - \sqrt{1-x} + 8\sin x < 8.$$

Решение. ОДЗ $0 \le x \le 1$. Функция $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 8sinx$на этом промежутке возрастает, для доказательства найдем производную $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} + 8cosx > 0$ при всех ч из этого промежутка.

Максимальное значение функции на этом промежутке при x = 1.

$f(x) \le f(1) = 1 + 8\sin 1 < 1 + 8\sin\pi/3 = 1 + 4\sqrt{3} < 8$.

Критерии:

- Без доказательства утверждается, что функция возрастающая и максимум достигается при $x = 1$ - 3 балла.
- Верное и обоснованное решение – 7 баллов.

3. Найдите все такие натуральные числа n, большие 1, для которых найдутся n подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2025?

Решение. Предположим, что для некоторого n нашлись n подряд идущих натуральных чисел a, $a+1$, . . . , $a+(n-1)$, сумма которых равна 2025. Тогда $na+(n-1)n/2 = 2025$, или, после алгебраических преобразований, $n(2a + n - 1) = 4050 = 2 \cdot 25 \cdot 81$. Заметим, что n и $2a + n - 1$ имеют разную чётность, а также $2a+n-1 \geq n$.

Поэтому, если n чётно, то $n < 63$.В этом случае возможны следующие варианты

$n = 2,\ a = 1012$

$n = 6,\ a = 335$

$n = 10,\ a = 198$

$n = 18,\ a = 104$

$n = 30,\ a = 53$

$n = 50,\ a = 16$

$n = 54,\ a = 11$

Если n – нечетно, то возможны следующие варианты

$n = 3,\ a = 674$

$n = 5,\ a = 403$

$n = 9,\ a = 221$

$n = 15,\ a = 128$

$n = 25,\ a = 69$

$n = 27,\ a = 62$

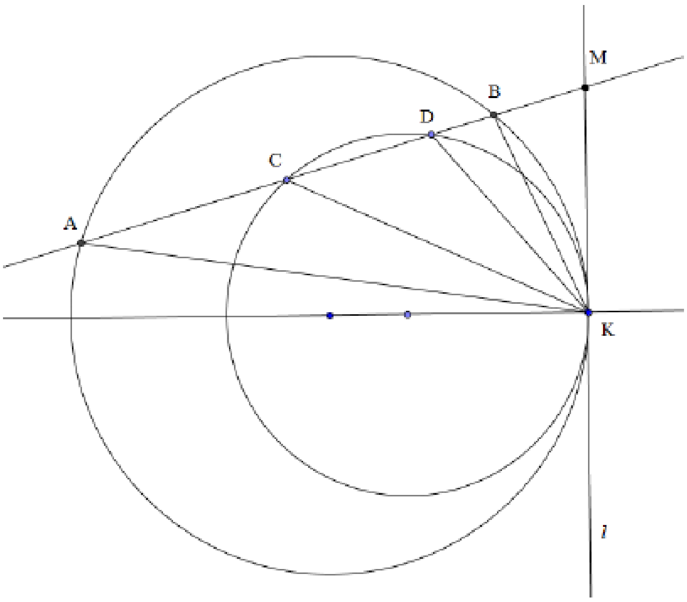
$n = 45,\ a = 23$

Таким образом, возможны 14 выше перечисленных значений n.

Критерии:

- Если указаны некоторые из значений nи приведены примеры сумм - не более 2-х баллов.
- Если найдены все решения и приведены примеры сумм, но не доказано, что других нет, - 3 балла.
- Найдены все значения n, приведены суммы, доказано, что других нет – 7 баллов

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке K. Прямая пересекает большую окружность в точках A и B, а меньшую окружность в точках C и D. Точка C лежит между A и D. Докажите, что <BKD = < AKC.



Решение.

Пусть l – общая касательная к окружностям в точке K, $l \cap (AB) = M$.

$\angle BKD = \angle DKM - \angle BKM$.

$\angle BKM$ - угол между касательной и секущей большей окружности. Следовательно, $\angle BKM = \angle BAK$.

$\angle DKM$ - угол между касательной и секущей меньшей окружности. Следовательно, $\angle DKM = \angle DCK$.

Итак, $\angle BKD = \angle DCK - \angle BAK$.

Из ΔACK

$$\angle AKC = 180^\circ - \angle BAK - \angle ACK = 180^\circ - \angle BAK - (180^\circ - \angle DCK) =$$

$$= \angle DCK - \angle BAK = \angle BKD,$$

что и требовалось доказать.

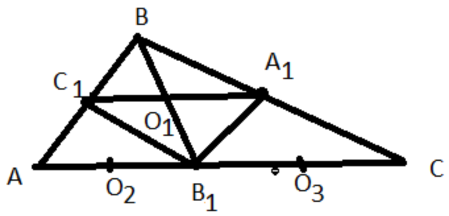
Критерии проверки:

- Верное решение – 7 баллов.

5. Какое наименьшее количество кругов единичного радиуса требуется, чтобы полностью покрыть ими треугольник со сторонами 2, 3, 4 ?

Ответ: три круга.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC = 4$, $AB = 2$, $BC = 3$. Обозначим через C_1, A_1, B_1 – середины сторон AB, BC и AC. Так как $AC^2 > AB^2 + BC^2$, то угол B – тупой. Точки A_1, B, C_1 и B_1 лежат внутри круга радиуса 1 с центром в точке O – середине отрезка A_1C_1. Круги радиуса 1 с центрами в точках O2 и O3 – срединах отрезков AB_1 и CB_1 соответственно, покрывают треугольники AC_1B_1 и CA_1B_1.



Покажем, что два единичных круга не покроют этот треугольник.Предположим противное. Отрезки AB_1 и CB_1 должны покрываться разными кругами, но их длина равна 2. Значит эти отрезки – диаметры кругов. Но тогда они не покрывают точку B.

Критерии проверки:

- Только ответ – три круга - 0 баллов.
- Ответ и пример расположения кругов с доказательством покрытия – 4 балла
- Доказательство того факта, что два круга не покроют треугольник, - 3 балла.
- Полное решение - 7 баллов.